Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero - Marzo, 2008

# MA-1112 —Practica: semana 2 y/o 3 —

Ejercicios sugeridos para la semana $2$ y/o $3$. Cubre el siguiente material: Propiedades de la integral definida, primer y segundo teorema fundamental del cálculo, regla de sustitución para integrales indefinidas y definidas. Material Adicional: Cálculo de Area y Teorema de simetría.

1. Resuelva las siguientes integrales indefinidas

   *a*) $\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{2-\operatorname{sen}^2(x)}dx.$
   **Solución:**
   Utilizando la igualdad $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ obtenemos que $2 - \operatorname{sen}^2(x) = 1 + \cos^2(x)$. Si realizamos el cambio de variable $u = \cos(x)$, $du = -\operatorname{sen}(x)dx$. Asi,

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{2-\operatorname{sen}^2(x)}dx &= \int \frac{-du}{1+u^2} = -\arctan(u) + C\\ &= -\arctan(\cos(x)) + C.\end{aligned}$$

   *b*) $\int \frac{\operatorname{sen}(4x)}{\cos(2x)\cos(x)}dx.$
   **Solución:**
   Encontrar un cambio de variable apropiado, no siempre es evidente. Por tanto, no debemos olvidar que existe la posibilidad de resolver un problema con propiedades trigonometricas. Utilizando la igualdad $\operatorname{sen}(2mx) = 2\operatorname{sen}(mx)\cos(mx)$ obtenemos que $\operatorname{sen}(4x) = 2\operatorname{sen}(2x)\cos(2x)$ y $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$. Asi,

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}(4x)}{\cos(2x)\cos(x)}dx &= \int \frac{2\operatorname{sen}(2x)\cos(2x)}{\cos(2x)\cos(x)}dx = 2\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(x)}dx\\ &= 2\int \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\cos(x)}dx = 4\int \operatorname{sen}(x)dx\\ &= -4\cos(x) + C.\end{aligned}$$

   *c*) $\int \cos^3(3x)\operatorname{sen}(3x)dx.$
   **Solución:**

$$\begin{aligned}\int \cos^3(3x)\operatorname{sen}(3x)dx &= \int \cos^2(3x)\cos(3x)\operatorname{sen}(3x)dx\\ &= \int (1-\operatorname{sen}^2)(3x)\cos(3x)\operatorname{sen}(3x)dx\end{aligned}$$

   Realizando el cambio de variable $u = 1 - \operatorname{sen}^2(3x)$ y $du = -6\operatorname{sen}(3x)\cos(3x)dx$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\int (1-\operatorname{sen}^2)(3x)\cos(3x)\operatorname{sen}(3x)dx = -\frac{1}{6}\int udu &= \frac{-u^2}{2} + C\\ &= \frac{-(1-\operatorname{sen}^2(3x))^2}{2} + C.\end{aligned}$$

2. Halle las siguientes integrales definidas:

*a*) $\int_{-2}^{0} g(t)dt$ con $g(t) = |t-1|-1$.
**Solución:**
Como $g(t) = |t-1|-1 = \begin{cases} t-2 & \text{si} \quad t>1 \\ \\ -t & \text{si} \quad t \leq 1 \end{cases}$

$$\int_{-2}^{0} g(t)dt = \int_{-2}^{0} -tdt = \frac{-t^2}{2} \mid_{-2}^{0} = 0 + \frac{4}{2} = 2.$$

*b*) $\int_{1}^{4} \frac{1}{w^2} dw$.
**Solución:**

$$\int_{1}^{4} \frac{1}{w^2} dw = \frac{w^{-2+1}}{-2+1} \mid_{1}^{4} = \frac{-1}{w} \mid_{1}^{4} = \frac{-1}{4} - \frac{-1}{1} = \frac{3}{4}.$$

*c*) $\int_{-1}^{2} (x - 2|x|)dx$.
**Solución:**
Como $f(x) = x - 2|x| = \begin{cases} 3x & \text{si} \quad x<0 \\ \\ -x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

$$\int_{-1}^{2} (x-2|x|)dx = \int_{-1}^{0} 3xdx + \int_{0}^{2} -xdx = \frac{3x^2}{2}|_{-1}^{0} + \frac{-x^2}{2}|_{0}^{2} = \frac{-7}{2}.$$

*d*) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2(3x)\cos(3x)dx$.
**Solución:**
Realizando el cambio de variable $r = \operatorname{sen}(3x)$, $dr = 3\cos(3x)dx$ y el limite de integración superior e inferior seran respectivamente: $a = \operatorname{sen}(0) = 0$ y $b = \operatorname{sen}(3\pi/2) = -1$. Asi,

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2(3x)\cos(3x)dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{-1} r^2 dr$$
$$= \frac{-1}{3}\int_{-1}^{0} r^2 dr = \frac{-1}{3}\left(\frac{r^3}{3}|_{-1}^{0}\right) = \frac{-1}{9}.$$

*e*) $\int_{-3}^{3} \sqrt{3- \mid t \mid} dt$.
**Solución:**
Sea

$$f(x) = \sqrt{3-\mid t \mid} = \begin{cases} \sqrt{3+t} & \text{si} \quad t<0 \\ \\ \sqrt{3-t} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Dado que $f$ es una función par (por ser $f(-t) = f(t)$), podemos utilizar el Teorema de simetría

$$\int_{-3}^{3} \sqrt{3-\mid t \mid} dt = 2\int_{0}^{3} \sqrt{3-t}dt$$

tomando el cambio de variable $u = 3-t$ $(du = -dt)$,

$$\int_{0}^{3} \sqrt{3-t}dt = -\int_{3}^{0} \sqrt{u}du = \int_{0}^{3} \sqrt{u}du$$

Es decir,

$$\int_{-3}^{3}\sqrt{3-\mid t\mid}dt = 2\int_{0}^{3}\sqrt{u}du = \frac{4u^{3/2}}{3}|_0^3 = 4\sqrt{3}.$$

*f)* $\int_{-\pi}^{\pi}(x^5+\mid \operatorname{sen}(x)\mid)dx.$

**Solución:**

Como $f(x) = \mid \operatorname{sen}(x)\mid = \begin{cases} -\operatorname{sen}(x) & \text{si} \quad -\pi \leq x \leq 0 \\ \\ \operatorname{sen}(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

Claramente, $f$ es una función par y $x^5$ una funcion impar. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi}(x^5+\mid \operatorname{sen}(x)\mid)dx &= \int_{-\pi}^{\pi}x^5dx + \int_{-\pi}^{\pi}\mid \operatorname{sen}(x)\mid dx \\ &= \frac{x^6}{6}|_{-\pi}^{\pi} + 2\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen}(x)dx \\ &= 0 - 2\cos(x)|_0^{\pi} = 2(1+1) = 4. \end{aligned}$$

*g)* $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\operatorname{sen}^5(\theta)d\theta.$

**Solución:**

La función $\operatorname{sen}(\theta)$ es una función impar, $f(\theta) = \operatorname{sen}^5(\theta)$ tambien lo es; ya que, $f(-\theta) = \operatorname{sen}^5(-\theta) = -\operatorname{sen}^5(\theta) = -f(\theta)$.

Luego, por el Teorema de simetría $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\operatorname{sen}^5(\theta)d\theta = 0$.

**Solución Alternativa**:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\operatorname{sen}^5(\theta)d\theta &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\operatorname{sen}(\theta)(\operatorname{sen}^2(\theta))^2d\theta \\ &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\operatorname{sen}(\theta)(1-\cos^2(\theta))^2d\theta. \end{aligned}$$

Utilizando el cambio de variable $u = \cos(\theta)$, $du = -\operatorname{sen}(\theta)d\theta$ con $a = \cos(-\pi/3) = 1/2$ y $b = \cos(\pi/3) = 1/2$. Asi,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\operatorname{sen}^5(\theta)d\theta &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\operatorname{sen}(\theta)(1-\cos^2(\theta))^2d\theta \\ &= -\int_{1/2}^{1/2}(1-u^2)^2du = 0. \end{aligned}$$

*h)* $\int_{-3}^{-1}\frac{t-2}{(t^2-4t+3)^2}dt.$

**Solución:**

Utilizando el cambio de variable $u = t^2-4t+3$, $du = (2t-4t)dt = 2(t-2)dt$ con $a = 24$ y $b = 8$. Asi,

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{-1}\frac{t-2}{(t^2-4t+3)^2}dt &= \frac{1}{2}\int_{24}^{8}\frac{du}{u^2} = \frac{-1}{2}\int_{8}^{24}\frac{du}{u^2} \\ &= \frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{u}\right)|_8^{24} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{24}+\frac{1}{8}) = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

3. Halle la derivada de las siguientes funciones:

   *a)* $\int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t}\operatorname{sen}(t)dt$.
   **Solución:**
   Sea

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t}\operatorname{sen}(t)dt = \int_{\sqrt{x}}^{0} \sqrt{t}\operatorname{sen}(t)dt + \int_{0}^{x^3} \sqrt{t}\operatorname{sen}(t)dt \\ &= -\int_{0}^{\sqrt{x}} \sqrt{t}\operatorname{sen}(t)dt + \int_{0}^{x^3} \sqrt{t}\operatorname{sen}(t)dt \end{aligned}$$

   Aplicando el primer Teorema Fundamental del Cálculo, obtenemos que

$$\begin{aligned} D_x\left(F(x)\right) &= -D_x\left(\int_{0}^{\sqrt{x}} \sqrt{t}\operatorname{sen}(t)dt\right) + D_x\left(\int_{0}^{x^3} \sqrt{t}\operatorname{sen}(t)dt\right) \\ &= \frac{-\sqrt{x}}{2}\operatorname{sen}(\sqrt{x}) + 3x^3\sqrt{x}\operatorname{sen}(x^3). \end{aligned}$$

   *b)* $\int_{x}^{x^2} (t+1)dt$.
   **Solución:**
   Sea

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x}^{x^2} (t+1)dt = \int_{x}^{0} (t+1)dt + \int_{0}^{x^2} (t+1)dt \\ &= -\int_{0}^{x} (t+1)dt + \int_{0}^{x^2} (t+1)dt \end{aligned}$$

   Aplicando el primer Teorema Fundamental del Cálculo, obtenemos que

$$\begin{aligned} D_x\left(F(x)\right) &= -D_x\left(\int_{0}^{x} (t+1)dt\right) + D_x\left(\int_{0}^{x^2} (t+1)dt\right) \\ &= -(x+1) + 2x(x^2+1). \end{aligned}$$

   *c)* $\int_{x}^{x^2} \frac{x^2}{t}dt$.
   **Solución:**
   Sea

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x}^{x^2} \frac{x^2}{t}dt = \int_{x}^{0} \frac{x^2}{t}dt + \int_{0}^{x^2} \frac{x^2}{t}dt \\ &= -\int_{0}^{x} \frac{x^2}{t}dt + \int_{0}^{x^2} \frac{x^2}{t}dt \end{aligned}$$

   Aplicando el primer Teorema Fundamental del Cálculo, obtenemos que

$$\begin{aligned} D_x\left(F(x)\right) = -D_x\left(\int_{0}^{x} \frac{x^2}{t}dt\right) + D_x\left(\int_{0}^{x^2} \frac{x^2}{t}dt\right) \\ = -x + 2x = x. \end{aligned}$$

4. Halle $f'(\frac{\pi}{2})$ si $f(x) = \int_{2x}^{3x} x^2\operatorname{sen}(5t)dt$.
   **Solución:**
   Sea

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{2x}^{3x} x^2\operatorname{sen}(5t)dt = \int_{2x}^{0} x^2\operatorname{sen}(5t)dt + \int_{0}^{3x} x^2\operatorname{sen}(5t)dt \\ &= -\int_{0}^{2x} x^2\operatorname{sen}(5t)dt + \int_{0}^{3x} x^2\operatorname{sen}(5t)dt \end{aligned}$$

Aplicando el primer Teorema Fundamental del Cálculo, obtenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= -D_x\left(\int_0^{2x} x^2 \operatorname{sen}(5t)dt\right) + D_x\left(\int_0^{3x} x^2 \operatorname{sen}(5t)dt\right) \\ &= -2x^2 \operatorname{sen}(10x) + 3x^2 \operatorname{sen}(15x). \end{aligned}$$

Asi, $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi^2}{2}\operatorname{sen}(5\pi) + \frac{3\pi^2}{4}\operatorname{sen}(\frac{15\pi}{2})$. Dado que $\operatorname{sen}(x+2k\pi) = \operatorname{sen}(x), \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \operatorname{sen}(5\pi) = \operatorname{sen}(\pi) = -1$ y $\operatorname{sen}(15\pi/2) = \operatorname{sen}(-\pi/2) = 0$. Tenemos que, $f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{2}$.

5. Halle la integral definida de cada una de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

   *a*) $f(t) = \begin{cases} g(t), & \text{sí} \quad -2 \leq t < 0 \\ h(t), & \text{sí} \quad 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{sí no} \end{cases}$ donde $g(t) = -(t+1)^2 + 1$ y $h(t) = |t-1| + 1$. En el intervalo $[-2, 1]$.
   **Solución:**

$$\int_{-2}^{1} f(t)dt = int_{-2}^{0} g(t)dt + \int_0^1 h(t)dt$$

   dado que $g(t) = -(t+1)^2 + 1 = -(t^2 + 2t)$ y que $h(t) = -t$ para $t \in [0, 1]$, tenemos que

$$\int_{-2}^{1} f(t)dt = -\int_{-2}^{0}(t^2 - 2t)dt - \int_0^1 tdt = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

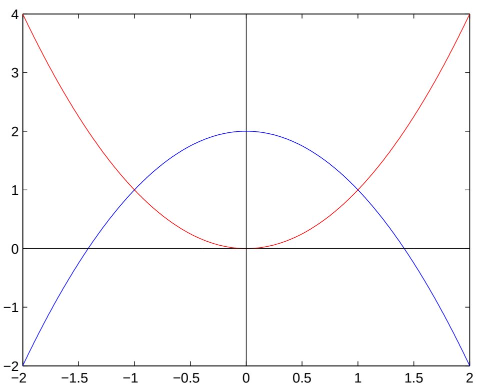
   *b*) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{sí} \quad 0 \leq x < 1 \\ x, & \text{sí} \quad 1 \leq x < 2 \\ 4-x & \text{sí} \quad 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$ en el intervalo $[0, 4]$.

   **Solución:**

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^1 dx + \int_1^2 xdx + \int_2^4 (4-x)dx = \frac{9}{2}.$$

6. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las siguientes funciones.

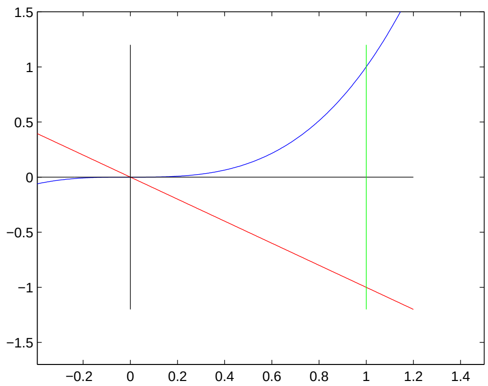
   *a*) $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2 - x^2$.
   **Solución:**



Para calcular el area de la region limitada, debemos hallar primero los puntos para los cuales se cumple que $x^2 = 1 - x^2$. Es decir, $x = \pm 1$, entonces el area de la region limitada es

$$\int_{-1}^{1}(2-x^2)dx - \int_{-1}^{1} x^2 dx = 2\left(\int_{0}^{1}(2-2x^2)dx\right) = 2\left(2x - \frac{2x^3}{3}\right)|_0^1 = \frac{8}{3}.$$

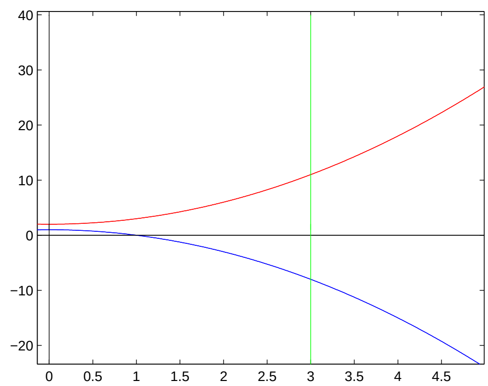
*b*) $f(x) = x^3$, $g(x) = -x$ y $x = 1$.
**Solución:**




El area de la region limitada es

$$\int_{0}^{1} x^3 dx + \int_{0}^{1} x dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

*c*) $f(x) = 1 - x^2 - 2x$, $g(x) = x^2 + 2$, los ejes coordenados y la recta $x = 3$.
**Solución:**

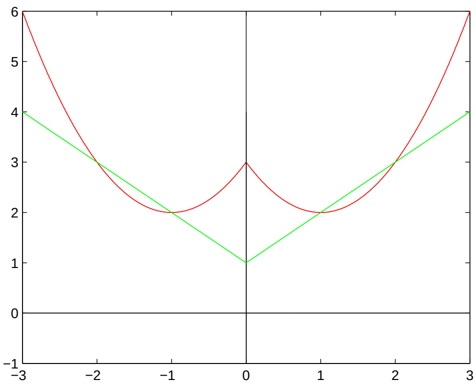



Para calcular el area de la region limitada, debemos hallar primero el punto (positivo) para el cual $f(x) = 1 - x^2 - 2x = 0$. Esto se satisface para $x = \sqrt{2} - 1$, entonces el area de la region limitada es

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^3 (x^2+2)dx - \int_0^{\sqrt{2}-1}(1-x^2-2x)dx + \int_{\sqrt{2}-1}^3 -(1-x^2-2x)dx \\ &= \int_0^3 (x^2+2)dx - \int_0^3 (1-x^2-2x)dx = \int_0^3 (2x^2+2x+1)dx \\ &= \left(\tfrac{2x^3}{3} + x^2 + x\right)|_0^3 = 18. \end{aligned}$$

*d*) $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2+2, & \text{sí} \quad x<0 \\ (x-1)^2+2, & \text{sí} \quad x \geq 0 \end{cases}$ y $g(x) = |x|+1$.

**Solución:**




Para calcular el area de la region limitada, debemos hallar primero los puntos para los cuales se cumple que $-x+1 = (x+1)^2+2$ y $x+1 = (x-1)^2+2$. Es decir, hallar los puntos para los cuales $x^2+3x+2=0$ ($x=-2$ o $x=-1$) y $x^2-3x+2=0$ ($x=2$ o $x=1$). Entonces el area de la region limitada es

$$\begin{aligned} A(R) = & \left(\int_{-2}^{-1}(-x+1)dx - \int_{-2}^{-1}((x+1)^2+2)dx\right) \\ & + \left(\int_{-1}^{0}((x+1)^2+2)dx - \int_{-1}^{0}(-x+1)dx\right) \\ & + \left(\int_{0}^{1}((x-1)^2+2)dx - \int_{0}^{1}(x+1)dx\right) \\ & + \left(\int_{1}^{2}(x+1)dx - \int_{1}^{2}((x-1)^2+2)dx\right) \\ A(R) = & \int_{-2}^{-1}(-x^2-3x-2)dx + \int_{-1}^{0}(x^2+3x+2)dx \\ & + \int_{0}^{1}(x^2-3x+2)dx + \int_{1}^{2}(-x^2+3x-2)dx \end{aligned}$$

Dado que las regiones son simetricas,

$$A(R) = 2\left(\int_0^1 (x^2-3x+2)dx + \int_1^2(-x^2+3x-2)dx\right) = 2.$$

7. Calcule $\int_2^4 (4x+3)dx$ como límite de sumas de Riemann (Al tomar la partición que divide a $[2,4]$ en $n$ subintervalos de igual longitud, seleccione a $\overline{x}_k$ como el extremo izquierdo de cada intervalo).

**Solución:**
$f(x) = 4x+3$ es una función continua en $[2,4]$, entonces $f$ es integrable en $[2,4]$. Sea $P = \{a =$

$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ una partición regular del intervalo $[2,4]$ donde cada $x_k = 2 + k\Delta x = 2 + \frac{2k}{n}$ con $k = 0, 1, \ldots, n$ y $\Delta x = \frac{2}{n}$. Si seleccionamos $\overline{x_k} = x_{k-1}$, $f(\overline{x_k}) = f(x_{k-1}) = 4x_{k-1} + 3$. Es decir,

$$f(\overline{x_k}) = 4(2 + (k-1)\frac{2}{n}) + 3 = 11 + \frac{8(k-1)}{n}.$$

Asi,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x &= \tfrac{2}{n}\left(11n + \tfrac{8}{n}\left(\textstyle\sum_{k=1}^{n} k\right) - 8\right) = \tfrac{2}{n}\left(11n + \tfrac{8}{n}\tfrac{n(n+1)}{2} - 8\right) \\ &= \tfrac{2}{n} \times (15n - 4) \\ &= \tfrac{30n-4}{n}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x = \lim_{n\to\infty} \frac{30n-4}{n} = 30$$

el límite existe, entonces

$$\int_2^4 (4x+3)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x = 30.$$

Para aportar cualquier sugerencia o comentario, por favor escriba a mdiaspar@usb.ve.